

# Un modèle itératif de surfaces pour la construction en bois

G. GOUATY♦♦ - E. TOSAN★ - I. STOTZ♦ - Y. WEINAND♦

★ LIRIS UMR CNRS 5205 - Université Claude Bernard Lyon I

♦ IBOIS - Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

gilles.gouaty@epfl.ch, eric.tosan@liris.cnrs.fr, ivo.stotz@epfl.ch, yves.weinand@epfl.ch

## Résumé

*Dans le cadre de la construction en bois, nous nous intéressons à la modélisation de maillages surfaciques 3D basés sur un modèle itératif inspiré du modèle IFS (Iterated Function System). Les formes modélisées doivent satisfaire certaines propriétés afin d'assurer leur constructibilité physique. Nous nous intéressons ici aux contraintes géométriques de planéité des faces d'un maillage quadrangulaire, permettant la construction d'assemblages de panneaux de bois découpés. Nous décrivons dans un premier temps un modèle permettant de représenter certains types de maillages à faces planes. Nous présentons ensuite quelques propriétés élémentaires du modèle itératif que nous utilisons, inspiré du modèle IFS. Le modèle défini est un IFS généré par un opérateur de combinaison entre deux IFS décrivant chacun une certaine courbe.*

*Ce modèle est défini comme une certaine somme de deux courbes à pôles générées par des IFS. Nous montrons qu'il peut également être considéré comme un carreau à pôles généré par un produit d'IFS.*

**Mots-clés :** modèle itératif, IFS, schéma de subdivision, surfaces, contraintes géométriques, coplanarité.

## 1 Introduction

### 1.1 Contexte

Dans le cadre de la construction en bois de forme complexes, nous nous intéressons à la modélisation géométrique basée sur la géométrie fractale, et plus particulièrement, sur le modèle IFS. Ce modèle permet de représenter une grande diversité de formes, avec relativement peu de paramètres. Ce modèle itératif peut générer des formes lisses ou fractales, et généralise les schémas de subdivision classiques [TBSG<sup>+</sup>06].

### 1.2 Contraintes liées à la construction

Le fait que les formes modélisées soient appliquées à la construction entraîne généralement un certain nombre de contraintes géométriques. Nous souhaitons notamment réaliser des structures surfaciques par assemblage de panneaux de bois. Cela nécessite de modéliser des maillages composés de faces planes.

Nous nous intéressons ici à la modélisation de maillages quadrangulaires. La triangulation de maillages pour obtenir des faces planes est une solution que nous écartons. Ceci provient des contraintes liées à la construction, et plus particulièrement de la complexité à réaliser des assemblages autour de sommets de valence élevée.

Les maillages quadrangulaires à faces planes, ont intéressé un certain nombre de chercheurs dans le domaine de la CAO en architecture. Les travaux récents sont ceux de Pottman et Wallner, en collaboration avec d'autres chercheurs [POT07] [LIU06] [POT06] [WANG06]. Ils utilisent des maillages coniques et des surfaces développables. Dans l'approche couramment utilisée pour ce type de problème, on génère un maillage qui cherche à approximer une certaine surface entrée en paramètre. Ces méthodes utilisent des procédés de géométrie différentielle discrète, et font l'hypothèse de certaines propriétés sur les surfaces à approximer, dont le fait d'être lisses.

### 1.3 Méthode

Nous avons d'abord essayé une méthode d'ajustement de maillage quadrangulaire à faces gauches générée par subdivision. Nous proposons une autre méthode, basée sur un modèle itératif qui génère directement des maillages quadrangulaire à faces planes.

Nous partons d'une somme vectorielle de deux courbes. Nous étendons les possibilités de création de formes en travaillant dans un espace homogène  $\mathbb{R}^4$  et en projetant les figures obtenues dans l'espace de modélisation  $\mathbb{R}^3$ . L'utilisation de la géométrie projective permet d'étendre la méthode par des paramètres supplémentaires comme le poids de certains points.

Pour définir les courbes, nous utilisons le modèle IFS. Nous obtenons ainsi un modèle itératif de surface, qui répond aux contraintes tout en offrant une grande richesse dans la création de formes.

Nous avons précédemment développé un outil qui permet de générer et manipuler des formes fractales [TBSS<sup>+</sup>07] avec une interface graphique. L'utilisateur peut agir d'une part sur un ensemble de points de contrôle, à la manière des formes à pôles classiques, et d'autre part sur un ensemble de points de subdivision, permettant de moduler l'aspect lisse ou fractal. En nous basant sur ceci, nous mettons en œuvre un procédé permettant de saisir automatiquement des maillages quadrangulaires à faces planes.

## 2 Définition de surfaces par somme de courbes

### 2.1 Somme centrée

Soit  $E^{\natural}$  un espace vectoriel, et  $c$  un élément de  $E^{\natural}$ . On définit un opérateur  $\star$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\star : E^{\natural} \times E^{\natural} &\rightarrow E^{\natural}, \\ p_1 \star p_2 &= c + \overrightarrow{c p_1} + \overrightarrow{c p_2}.\end{aligned}$$

On notera également :

$$\begin{aligned}p_1 \star p_2 &= c + \overrightarrow{c p_1} + \overrightarrow{c p_2}, \\ &= p_1 + \overrightarrow{c p_2}, \\ &= p_2 + \overrightarrow{c p_1}, \\ &= p_1 + p_2 - c.\end{aligned}$$

Nous utilisons cet opérateur afin de générer une surface à l'aide de deux courbes.

### 2.2 Interprétation en géométrie affine

#### 2.2.1 Maillages (cas discret)

On considère deux listes de points  $p_i^a$  et  $p_j^b$  définis dans  $E^{\natural}$ . En composant ces deux listes par l'opérateur  $\star$ , on obtient un tableau de points  $p_{i,j}$  :

$$\begin{aligned}p_{i,j} &= p_i^a \star p_j^b, \\ &= p_i^a + p_j^b - c.\end{aligned}$$

Les listes  $p_i^a$  et  $p_j^b$  représentent des lignes brisées, dont les arêtes sont les couples  $(p_i^a, p_{i+1}^a)$  (resp.  $(p_j^b, p_{j+1}^b)$ ). Ces arêtes sont combinées pour former les faces quadrangulaires d'un maillage (voir figure 1).

Chacune de ces faces est un parallélogramme. En effet, les bords hauts et bas de chaque face sont tous les deux images par translation d'une arête de  $p^a$ , de même que les bords droits et gauches sont images par translation d'une arête de  $p^b$ .

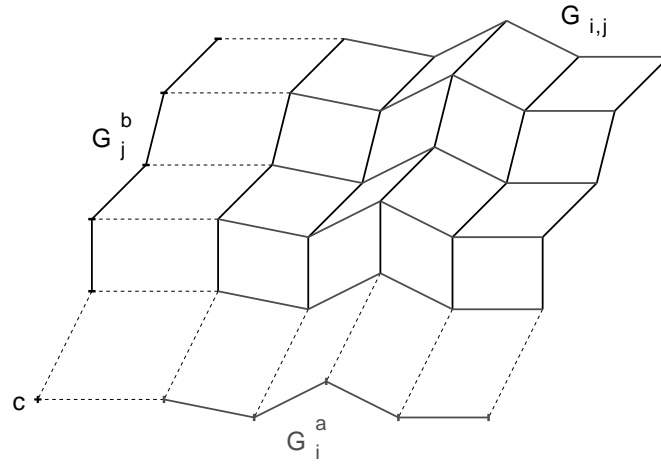


FIG. 1 – Construction d'un maillage par somme de lignes brisées.

En effet, de manière générale, on a :

$$\begin{aligned}
 p_{i_1, j_2} + p_{i_2, j_1} - p_{i_1, j_1} &= (p_{i_1}^a + p_{j_2}^b - c) + (p_{i_2}^a + p_{j_1}^b - c) - (p_{i_1}^a + p_{j_1}^b - c), \\
 &= p_{i_2}^a + p_{j_2}^b - c, \\
 &= p_{i_2, j_2}.
 \end{aligned}$$

En particulier, pour la face  $(p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i,j+1}, p_{i+1,j+1})$

$$\begin{aligned}
 p_{i+1, j+1} &= p_{i+1, j} + p_{i, j+1} - p_{i, j}, \\
 &= p_{i, j} + \overrightarrow{p_{i, j} p_{i+1, j}} + \overrightarrow{p_{i, j} p_{i, j+1}}.
 \end{aligned}$$

Les points du bord haut  $p_{i, n-1}$  sont images par translation des points du bord bas  $p_{i, 0}$ .

$$p_{i, n-1} = p_{i, 0} + \overrightarrow{p_{0, 0} p_{0, n-1}}.$$

### 2.2.2 Carreaux (cas continu)

On considère  $G^a$  et  $G^b$  comme des courbes paramétrées.

$$\begin{aligned}
 G^a : [0, 1] &\rightarrow E^{\mathfrak{d}}, \\
 G^b : [0, 1] &\rightarrow E^{\mathfrak{d}}.
 \end{aligned}$$

L'opérateur  $\star$  appliqué à  $G^a$  et  $G^b$  génère alors une surface paramétrée (voir figure 2) :

$$\begin{aligned}
 G(s, t) &= G^a(s) \star G^b(t), \\
 &= G^a(s) + G^b(t) - c.
 \end{aligned}$$

Notons que la surface ainsi générée correspond alors au balayage d'une courbe par une autre. En particulier, les bords hauts et bas de la surface sont tous les deux images par translation de la courbe  $G^a$ , de même que les bords droits et gauches sont images par translation de la courbe  $G^b$  :

$$\begin{aligned}
 G(s, 0) &= G^a(s) + \overrightarrow{c G^b(0)}, \\
 G(s, 1) &= G^a(s) + \overrightarrow{G^b(0) G^b(1)}, \\
 G(0, t) &= G^b(s) + \overrightarrow{c G^a(0)}, \\
 G(1, t) &= G^b(s) + \overrightarrow{G^a(0) G^a(1)}.
 \end{aligned}$$

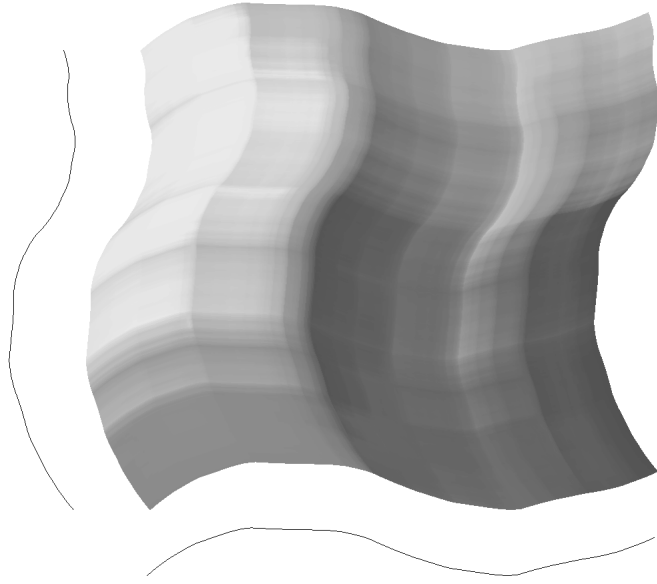


FIG. 2 – Construction d'une surface par somme de courbes.

De manière analogue au cas discret, on a :

$$G(s_2, t_2) = G(s_1, t_2) + G(s_2, t_1) - G(s_1, t_1).$$

## 2.3 Interprétation en géométrie projective

Le procédé décrit précédemment permet de définir un ensemble de surfaces comme la somme de deux courbes. Les maillages générés ont la propriété d'être uniquement composés de parallélogrammes. Ceci constitue une limitation importante sur les maillages qu'on peut obtenir avec ce modèle.

Notre but est d'obtenir des maillages à faces planes, mais il n'est ni nécessaire ni souhaitable que ces faces soient des parallélogrammes. L'utilisation des coordonnées homogènes présente l'intérêt suivant : l'image d'un parallélogramme par une transformation projective, est un quadrilatère plan, qui n'est pas forcément un parallélogramme.

Nous généralisons le modèle précédent, de manière à générer des maillages dont les faces ne sont plus des parallélogrammes dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  mais des parallélogrammes dans l'espace homogène  $\mathbb{R}^4$ . Le passage en coordonnées homogènes  $(w, x, y, z)$  permet de généraliser la combinaison de courbes.

### 2.3.1 Espace homogène

On identifie l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  à l'hyperplan d'équation  $w = 1$  dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4 = (w, x, y, z)$ . La projection centrale  $\Pi$ , qui à chaque vecteur  $v \in \mathbb{R}^4$  associe le vecteur engendré par  $v$  appartenant à l'hyperplan  $w = 1$ , est définie par :

$$\begin{aligned} \Pi : \{(w, x, y, z)^T \in \mathbb{R}^4 / w \neq 0\} &\rightarrow \{(1, x, y, z)^T / (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3\}, \\ \Pi(w, x, y, z)^T &= \left(1, \frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)^T. \end{aligned}$$

L'opérateur  $\star$  défini précédemment peut s'appliquer à deux courbes définies dans  $\mathbb{R}^4$  et effectue leur somme dans ce même espace. La surface modélisée est obtenue par projection centrale de cette surface sur l'hyperplan  $w = 1$ .

Notons que la projection centrale ne commute pas avec  $\star$ . Le procédé que nous avons défini n'est donc pas équivalent à la somme des projections centrales des deux courbes.

### 2.3.2 Projection de la somme centrée

En posant  $q^a = \Pi(p^a)$ ,  $q^b = \Pi(p^b)$  et  $q^c = \Pi(c)$ , la projection de la somme centrée  $q = \Pi(p^a \star p^b)$  vérifie :

$$\begin{aligned} q &= \Pi(p^a \star p^b), \\ &= \frac{1}{w^a + w^b - w^c} (p^a + p^b - c), \\ &= \frac{w^a}{w^a + w^b - w^c} q^a + \frac{w^b}{w^a + w^b - w^c} q^b + \frac{w^c}{w^a + w^b - w^c} q^c. \end{aligned}$$

En prenant  $w^c = 1$ , et en posant  $w^a = 1 + r$ ,  $w^b = 1 + r'$ , on a  $w^a + w^b - w^c = 1 + r + r'$  et :

$$\begin{aligned} q &= \frac{1+r}{1+r+r'} q^a + \frac{1+r'}{1+r+r'} q^b - \frac{1}{1+r+r'} q^c, \\ &= q^a - \frac{r'}{1+r+r'} q^a + q^b - \frac{r}{1+r+r'} q^b - q^c + \frac{r+r'}{1+r+r'} q^c, \\ &= (q^a \star q^b) - \frac{r'}{1+r+r'} \overrightarrow{q^c q^a} - \frac{r}{1+r+r'} \overrightarrow{q^c q^b}. \end{aligned}$$

Pour  $w^a = 1$  et  $w^b = 1$ , on a  $r = r' = 0$  et il y a conservation de la somme centrée :

$$\Pi(p^a \star p^b) = q^a \star q^b.$$

Pour  $w^a \neq 1$  et  $w^b = 1$ , on a  $r \neq 0$  et  $r' = 0$  et la somme centrée subit une translation supplémentaire dans la direction  $\overrightarrow{q^c q^b}$  :

$$\Pi(p^a \star p^b) = (q^a \star q^b) - \frac{r}{1+r} \overrightarrow{q^c q^b}.$$

Pour  $w^a \neq 1$  et  $w^b \neq 1$ , on a  $r \neq 0$  et  $r' \neq 0$  et la somme centrée subit deux translations supplémentaires dans les directions  $\overrightarrow{q^c q^a}$  et  $\overrightarrow{q^c q^b}$  :

$$\Pi(p^a \star p^b) = (q^a \star q^b) - \frac{r'}{1+r+r'} \overrightarrow{q^c q^a} - \frac{r}{1+r+r'} \overrightarrow{q^c q^b}.$$

### 2.3.3 Projection de parallélogrammes

Le parallélogramme  $(p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{11})$  est défini par quatre points de  $\mathbb{R}^4$  tels que :

$$p_{11} = p_{10} + p_{01} - p_{00}.$$

Sa projection dans  $\mathbb{R}^3$  est un quadrilatère de sommets  $(q_{00}, q_{10}, q_{01}, q_{11})$  avec  $q_{kl} = \Pi(p_{kl})$  pour  $k, l \in \{0, 1\}$ .

Les points projetés sont coplanaires :

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{p_{11}}{w_{11}}, \\ &= \frac{1}{w_{11}} (p_{10} + p_{01} - p_{00}), \\ &= \frac{1}{w_{11}} (w_{10} q_{10} + w_{01} q_{01} - w_{00} q_{00}), \\ &= \frac{w_{10}}{w_{11}} q_{10} + \frac{w_{01}}{w_{11}} q_{01} - \frac{w_{00}}{w_{11}} q_{00}. \end{aligned}$$

avec  $\frac{w_{10}}{w_{11}} + \frac{w_{01}}{w_{11}} - \frac{w_{00}}{w_{11}} = 1$ .

### 2.3.4 Projection de maillages

Tout maillage de  $\mathbb{R}^4$  projeté  $q_{ij} = \Pi(p_{ij})$  avec  $p_{i,j} = p_i^a \star p_j^b$  est composé de facettes quadrangulaires planes  $(q_{i,j}, q_{i+1,j}, q_{i,j+1}, q_{i+1,j+1})$  car :

$$q_{i+1,j+1} = \frac{w_{i+1,j}}{w_{i+1,i+1}} q_{i+1,j} + \frac{w_{i,j+1}}{w_{i+1,j+1}} q_{i,j+1} - \frac{w_{i,j}}{w_{i+1,j+1}} q_{i,j}.$$

avec  $\frac{w_{i+1,j}}{w_{i+1,i+1}} + \frac{w_{i,j+1}}{w_{i+1,j+1}} - \frac{w_{i,j}}{w_{i+1,j+1}} = 1$ .

### 2.3.5 Influence des poids

Sur les nœuds  $(i, j)$  où  $w_i^a = 1$ ,  $w_j^b = 1$ , il y a conservation de la somme centrée :

$$q_{i,j} = q_i^a \star q_j^b.$$

Si  $w_k^a = 1 + r_k$ , la colonne  $k$  du maillage est modifiée :

$$q_{k,j} = (q_k^a \star q_j^b) - \frac{r_k}{1 + r_k} (q_j^b - q^c).$$

Si  $w_k^a = 1 + r_k$  et  $w_l^b = 1 + r_l'$ , la colonne  $k$  et la ligne  $l$  sont modifiées (Voir figure 3) :

$$\begin{aligned} q_{k,j} &= (q_k^a \star q_j^b) - \frac{r_k}{1 + r_k} (q_j^b - q^c), \\ q_{i,l} &= (q_i^a \star q_l^b) - \frac{r_l'}{1 + r_l'} (q_i^a - q^c), \\ q_{k,l} &= (q_k^a \star q_l^b) - \frac{r_l'}{1 + r_k + r_l'} (q_k^a - q^c) - \frac{r_k}{1 + r_k + r_l'} (q_l^b - q^c). \end{aligned}$$

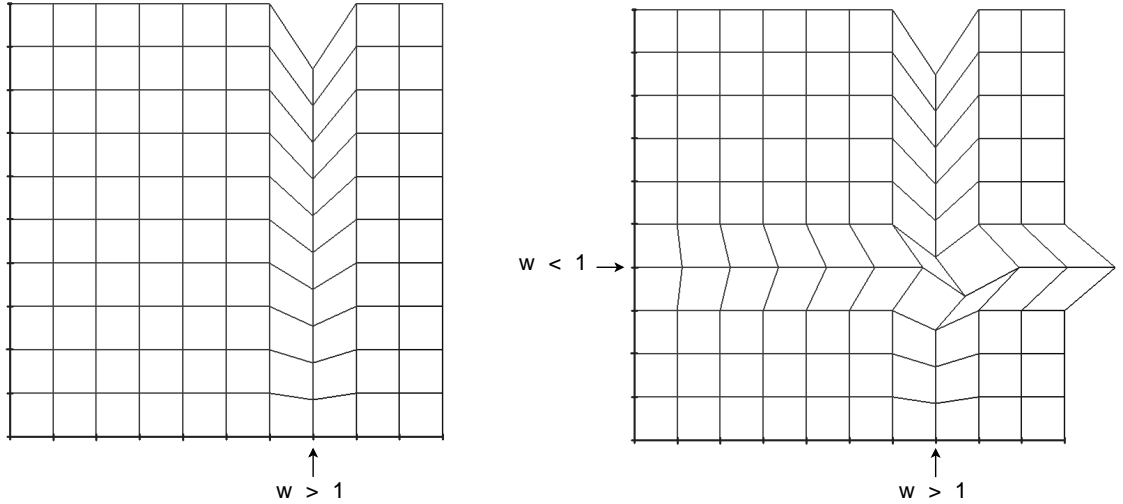


FIG. 3 – Maillages surfaciques obtenus par somme de lignes brisées définies en coordonnées homogènes. Effets dus à l'augmentation ou la diminution d'un poids sur un bord.

### 2.3.6 Projection de carreaux

Le carreau paramétré est défini par projection de la somme centrée d'arcs paramétrés :

$$H(s_k, t_l) = \Pi(G^a(s_k) \star G^b(t_l)).$$

Il vérifie la propriété de planéité locale suivante. Pour tout quadruplets de nombres  $0 \leq s_0 < s_1$  et  $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1$ , le quadrilatère dont les sommets sont les points  $q_{kl} = H(s_k, t_l)$  pour  $k, l \in \{0, 1\}$  est plan, car :

$$H(s_k, t_l) = \Pi(G^a(s_k) \star G^b(t_l)).$$

### 3 Modélisation itérative

Le modèle IFS permet de représenter des courbes ou des surfaces par subdivisions successives, selon un certain niveau d'itération donné. Cependant, contrairement aux schémas de subdivision classiques, les formes limites obtenues peuvent ne pas être lisses mais fractales [TBSG<sup>+</sup>06].

La méthode de construction de surfaces par somme de courbes, vue précédemment, permet de générer automatiquement des maillages quadrangulaires à faces planes, quelles que soient les deux courbes passées en entrée. Dans cette partie, nous appliquons cette méthode, en utilisant comme paramètres des courbes définies par IFS.

#### 3.1 Rappels sur les IFS

##### 3.1.1 Définition d'un IFS

Un IFS est une famille finie d'opérateurs contractants  $T_i$  sur un espace métrique complet  $E$ .

À un IFS est associé un attracteur  $A$ , unique compact non vide vérifiant [BAR88] :

$$A = \bigcup_i T_i A.$$

Les opérateurs  $T_i$  étant indicés dans l'ensemble fini  $\Sigma = \{0, \dots, N-1\}$ , chaque point de  $A$  est indexé par une fonction d'adressage  $\Phi : \Sigma^\omega \rightarrow E$ . Le calcul de cette fonction s'effectue en appliquant des produits infinis de  $T_i$  sur un point  $\kappa$  arbitraire de  $E$  :

$$\Phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\sigma 1} \dots T_{\sigma n} \kappa.$$

##### 3.1.2 Formes à pôles

En distinguant espace de modélisation  $E^\natural$  et espace d'itération  $E$ , et en introduisant un opérateur de projection  $P$  qui permet de passer de l'un à l'autre, nous avons pu représenter les formes à pôles avec le modèle IFS [ZT96].

En prenant  $E^\natural = \mathbb{R}^4$  et  $E = \mathbb{R}^J$  avec  $J$  ensemble fini d'indices,  $P$  est une matrice  $4 \times J$  dont les colonnes sont assimilables à des points de contrôle d'une forme à pôles :

$$P\Phi(\sigma) = \sum_j \Phi_j(\sigma) p_j,$$

avec  $P = (p_j)_{j \in J}$  famille de points de contrôle, et  $\Phi = (\Phi_j)_{j \in J}$  famille de fonctions de mélange correspondante.

Les formes à pôles itératives constituent des familles à deux types de paramètres : les coordonnées des points de contrôle  $p_j$  et les coefficients des matrices de subdivision  $T_i$ . Comme dans l'approche CAO classique, la manipulation des points de contrôle permet d'effectuer des déformations globales. La manipulation des matrices de subdivision  $T_i$  permet en plus de moduler l'aspect local, passer du lisse au rugueux. Les valeurs des coefficients de mélange  $\Phi_j(\sigma)$  sont des fonctions analytiques des coefficients des matrices de subdivision  $T_i$  [GT05].

### 3.2 Modèle itératif des courbes et des surfaces

Nous définissons les arcs paramétrés  $G^a(s)$  et  $G^b(t)$  à partir des  $\Phi^a$  et  $\Phi^b$  fonctions d'adressage associées à des IFS :

$$\begin{aligned} G^a(s) &= P^a \Phi^a(\sigma), \\ G^b(t) &= P^b \Phi^b(\tau). \end{aligned}$$

avec :

- $\Sigma_a = \{0, \dots, N_a - 1\}$ ,  $\Sigma_b = \{0, \dots, N_b - 1\}$  ;
- $(T_i^a)_{i \in \Sigma_a}$ ,  $(T_i^b)_{i \in \Sigma_b}$ , deux IFS vérifiant certaines conditions de raccord pour générer des courbes (voir 3.4.3) ;
- $\sigma$  développement en base  $N_a$  de  $s \in [0, 1]$  ;
- $\tau$  développement en base  $N_b$  de  $t \in [0, 1]$  ;
- $J^a = \{0, \dots, m_a\}$  et  $J^b = \{0, \dots, m_b\}$  indices des polygones de contrôle.

Nous définissons les carreaux paramétrés comme somme de de ces deux arcs à pôles :

$$G(s, t) = P^a \Phi^a(\sigma) \star P^b \Phi^b(\tau).$$

### 3.3 Calcul itératif des maillages

Les lignes brisées qui approximent les arcs sont données par :

$$\begin{aligned} p_i^{a(n)} &= G_n^a(s_i), \\ &= P^a T_{\sigma_1 \dots \sigma_n}^a \kappa_0^a; \end{aligned}$$

avec :

- $\sigma_1 \dots \sigma_n 0^\omega$  développement de  $s_i = \frac{i}{N_a^n}$  en base  $N_a$ ,
- $\kappa_0^a = \Pi_0^a \kappa^s$  point initial de  $\mathbb{R}^{J^a}$ .

De même :

$$\begin{aligned} p_j^{b(n)} &= G_n^b(t_j), \\ &= P^b T_{\tau_1 \dots \tau_n}^b \kappa_0^b; \end{aligned}$$

avec :

- $\tau_1 \dots \tau_n 0^\omega$  développement de  $t_j = \frac{j}{N_b^n}$  en base  $N_b$ ,
- $\kappa_0^b = \Pi_0^b \kappa^s$  point initial de  $\mathbb{R}^{J^b}$ .

Les maillages qui approximent les carreaux sont donnés par :

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(n)} &= G_n(s_i, t_j), \\ &= G_n^a(s_i) \star G_n^b(t_j), \\ &= p_i^{a(n)} \star p_j^{b(n)}. \end{aligned}$$

### 3.4 Interprétation en géométrie affine

#### 3.4.1 Somme d'arcs

Le modèle itératif affine peut s'écrire comme un carreau à pôles dont les points de contrôle sont les  $p_i^a, p_j^b$  et  $c$  :

$$\begin{aligned} G(s, t) &= P^a \Phi^a(\sigma) \star P^b \Phi^b(\tau), \\ &= \sum_i \Phi_i^a(\sigma) p_i^a + \sum_j \Phi_j^b(\tau) p_j^b - c. \end{aligned}$$

avec  $\sum_i \Phi_i^a(\sigma) + \sum_j \Phi_j^b(\tau) - 1 = 1$ .



### 3.4.2 Produit d'arcs

On définit un opérateur  $\bullet$  permettant d'adresser un élément de la surface en fonction des adresses associées dans chacune des deux courbes :

$$\begin{aligned} k \bullet l &= m_a k + l, \\ \sigma \bullet \tau &= \sigma_1 \bullet \tau_1 \dots \sigma_n \bullet \tau_n \dots \end{aligned}$$

Le modèle itératif affine peut également s'écrire comme un carreau à pôles défini par un IFS :

$$\begin{aligned} G(s, t) &= (P^a \star P^b) \Phi(\sigma \bullet \tau), \\ &= \sum_{i,j} p_{i,j} \Phi_{i,j}(\sigma \bullet \tau). \end{aligned}$$

C'est un carreau à pôles avec :

– la grille de contrôle  $P^a \star P^b = (p_{i,j})_{(i,j) \in J^a \times J^b}$  obtenue par somme des polygones de contrôle des arcs :

$$p_{i,j} = p_i^a \star p_j^b;$$

– les fonctions de mélange sont obtenues par produit  $\Phi_{i,j}(\sigma \bullet \tau) = \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau)$ .

En effet, comme  $\sum_i \Phi_i^a(\sigma) = 1$  et  $\sum_j \Phi_j^b(\tau) = 1$  nous avons la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (p_i^a \star p_j^b) \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau) &= \sum_{i,j} (p_i^a + p_j^b - c) \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau), \\ &= \sum_{i,j} \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau) p_i^a + \sum_{i,j} \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau) p_j^b - \sum_{i,j} \Phi_i^a(\sigma) \Phi_j^b(\tau) c, \\ &= \left( \sum_i \Phi_i^a(\sigma) \right) \left( \sum_j \Phi_j^b(\tau) \right) p_i^a + \left( \sum_i \Phi_i^a(\sigma) \right) \left( \sum_j \Phi_j^b(\tau) \right) p_j^b - \left( \sum_i \Phi_i^a(\sigma) \right) \left( \sum_j \Phi_j^b(\tau) \right) c, \\ &= \sum_i \Phi_i^a(\sigma) p_i^a + \sum_j \Phi_j^b(\tau) p_j^b - c. \end{aligned}$$

De plus le produit tensoriel  $\Phi(\sigma \bullet \tau) = \Phi^a(\sigma) \otimes \Phi^b(\tau)$  est une fonction d'adressage engendrée par le produit tensoriel d'IFS  $(T_i^a \otimes T_j^b)_{i \in \Sigma_a, j \in \Sigma_b}$  [ZT96].

### 3.4.3 Saisie interactive

Les paramètres de cette famille de careaux sont les points de contrôle des arcs de courbe :  $P^a = (p_j^a)$  et  $P^b = (p_j^b)$  ainsi que les matrices de subdivision  $T_i^a$  et  $T_i^b$  vérifiant des équations de raccords :

$$\begin{aligned} T_{i-1}^a \Pi_1^a &= T_i^a \Pi_0^a, \\ \Pi_0^a T^s &= T_0^a \Pi_0^a, \\ \Pi_1^a T^s &= T_1^a \Pi_1^a. \end{aligned}$$

Nous avons précédemment développé une méthode traitant de manière formelle ce type de contraintes [TBSS<sup>+</sup>07]. Les paramètres indépendants du système sont saisis de manière interactive dans une interface graphique. La saisie s'effectue en déplaçant un ensemble de points de contrôle et de points de subdivision dans l'espace de modélisation. Le déplacement de ces points entraîne la mise à jour de coefficients dans les matrices, tout en conservant les contraintes de raccord.

Les points de contrôle correspondent aux colonnes de la matrice  $P^a$  (ou  $P^b$ ) :

$$p_k^a = P^a e_k.$$

Les points de subdivision correspondent aux colonnes des matrices  $P^a T_i^a$  (ou  $P^b T_i^b$ ) :

$$p_k^{a,i} = P^a T_i^a e_k.$$

En raison des équations de raccord, à chacun des points de subdivision peuvent être associées plusieurs colonnes dans les matrices de subdivision. En effet :

$$\begin{aligned} T_i^a e_k &= T_j^a e_l \\ \Rightarrow P^a T_i^a e_k &= P^a T_j^a e_l. \end{aligned}$$

Dans le cas affine, ce sont des points homogènes tels que  $w_k^a = 1$  et  $w_k^{a,i} = 1$ . Pour cela, la somme des coordonnées de chaque colonne des matrices de subdivision  $T_i^a$  est égale à 1.

### 3.5 Interprétation en géométrie projective

#### 3.5.1 Projection de somme

Le modèle itératif projeté de carreau s'écrit comme une somme :

$$\begin{aligned} H(s, t) &= \Pi(P^a \Phi^a(\sigma) \star P^b \Phi^b(\tau)), \\ &= \Pi\left(\sum_i \Phi_i^a(\sigma) p_i^a + \sum_j \Phi_j^b(\tau) p_j^b - c\right), \\ &= \sum_i \tilde{\Phi}_i^a(\sigma, \tau) q_i^a + \sum_j \tilde{\Phi}_j^b(\sigma, \tau) q_j^b + \tilde{\Phi}^c(\sigma, \tau) p^c. \end{aligned}$$

C'est un carreau à pôles dont les points de contrôle sont  $q_i^a = \Pi(p_i^a)$ ,  $q_j^b = \Pi(p_j^b)$ , et  $q^c = \Pi(c)$  et les fonctions de mélange sont les fractions :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i^a(\sigma, \tau) &= \frac{\Phi_i^a(\sigma) w_i^a}{w(\sigma, \tau)}, \\ \tilde{\Phi}_j^b(\sigma, \tau) &= \frac{\Phi_j^b(\tau) w_j^b}{w(\sigma, \tau)}, \\ \tilde{\Phi}^c(\sigma, \tau) &= \frac{-1}{w(\sigma, \tau)}, \end{aligned}$$

avec  $w(\sigma, \tau) = \sum_i \Phi_i^a(\sigma) w_i^a + \sum_j \Phi_j^b(\tau) w_j^b - 1$ .

#### 3.5.2 Projection de produit

Le modèle itératif projeté peut également s'écrire comme un carreau à pôles défini par un IFS :

$$\begin{aligned} H(s, t) &= \Pi((P^a \star P^b) \Phi(\sigma \bullet \tau)), \\ &= \Pi\left(\sum_{i,j} p_{i,j} \Phi_{i,j}(\sigma \bullet \tau)\right), \\ &= \Pi(P^a \star P^b) \tilde{\Phi}(\sigma \bullet \tau). \end{aligned}$$

C'est un carreau à pôles dont les points de contrôle sont  $q_{i,j} = \Pi(p_i^a \star p_j^b)$  et les fonctions de mélange sont les fractions :

$$\tilde{\Phi}_{i,j}(\sigma \bullet \tau) = \frac{\Phi_{i,j}(\sigma \bullet \tau) w_{i,j}(\sigma \bullet \tau)}{w(\sigma \bullet \tau)},$$

avec  $w(\sigma \bullet \tau) = \sum_{i,j} w_{i,j}(\sigma \bullet \tau)$ .

Etant une projection de somme, la grille de contrôle  $\Pi(P^a \star P^b)$  est composée de faces planes.

### 3.5.3 Saisie interactive

L'interface de saisie interactive permet de déplacer les points de contrôle et les points de subdivision, et en plus de moduler leur poids. La modification d'un poids revient à multiplier les colonnes de matrices correspondantes par un certain facteur.

Les points de contrôle homogènes  $p_i^a$  et  $p_j^b$  sont définis par la donnée de points de contrôle dans  $\mathbb{R}^3$   $q_i^a$  et  $q_j^b$  et celle de poids  $w_i^a$  et  $w_j^b$  car on a :

$$\begin{aligned} p_i^a &= w_i^a q_i^a, \\ p_j^b &= w_j^b q_j^b. \end{aligned}$$

La multiplication des poids  $w_k^{a,i}$  par un certain facteur revient à multiplier par le même facteur les points de subdivision  $p_k^{a,i}$  ainsi que les colonnes des matrices  $T_i^a$  correspondantes. Ceci permet d'effectuer des déformations homographiques (voir figure 4).

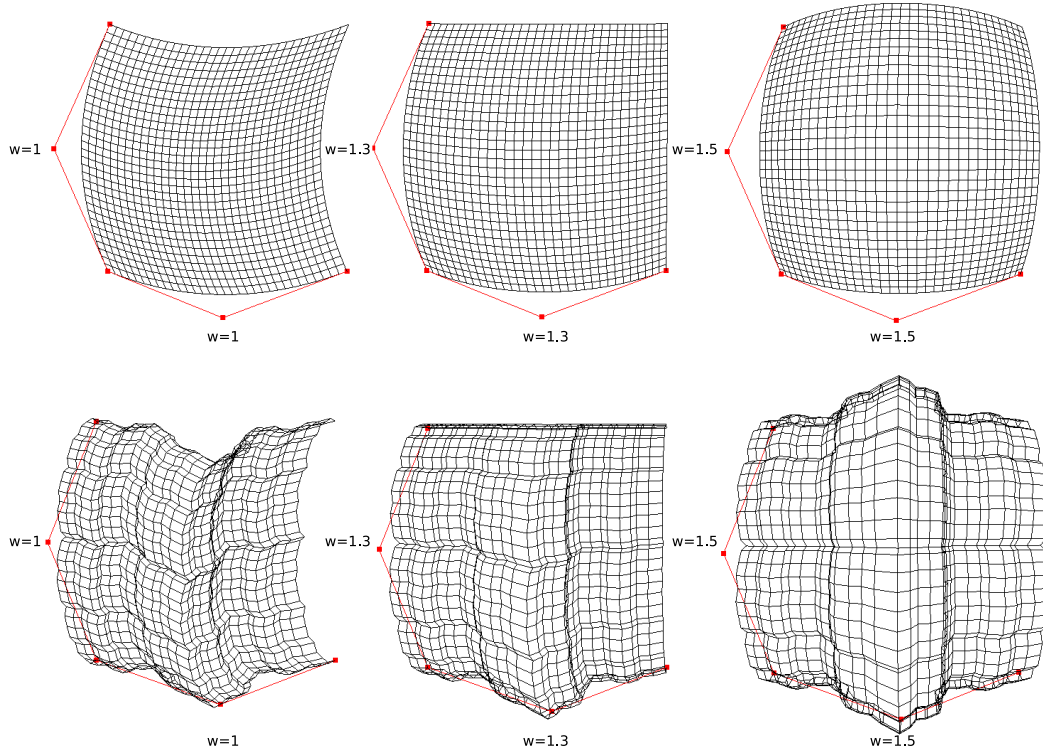


FIG. 4 – Maillages surfaciques obtenus par déformation homographique d'une somme de courbes générées par des IFS affines.

Les points de subdivision homogènes correspondent toujours aux colonnes des matrices  $P^a T_i^a$  (ou  $P^b T_j^b$ ) :  $p_k^{a,i} = P^a T_i^a e_k$ , mais les coordonnées de ces colonnes ne sont plus généralement de somme égale à 1. La modulation des poids  $w_k^{a,i}$  des points de subdivision par un certain facteur  $p_k^{a,i}$  revient à multiplier par le même facteur la colonne de  $T_i^a$  correspondante. On passe d'un IFS affine à un IFS projectif. Ceci permet également de changer l'aspect de la surface. Les matrices  $T_i^a$  (ou  $T_j^b$ ) étant modifiées, l'aspect des courbes est modifié (voir figure 5).

## 4 Application à la construction

La méthode de surface proposée permet la génération d'une gamme de figures nouvelles, tout en répondant aux critères de planéité. Ainsi, elle offre aux concepteurs architectes un outil de modélisation de formes

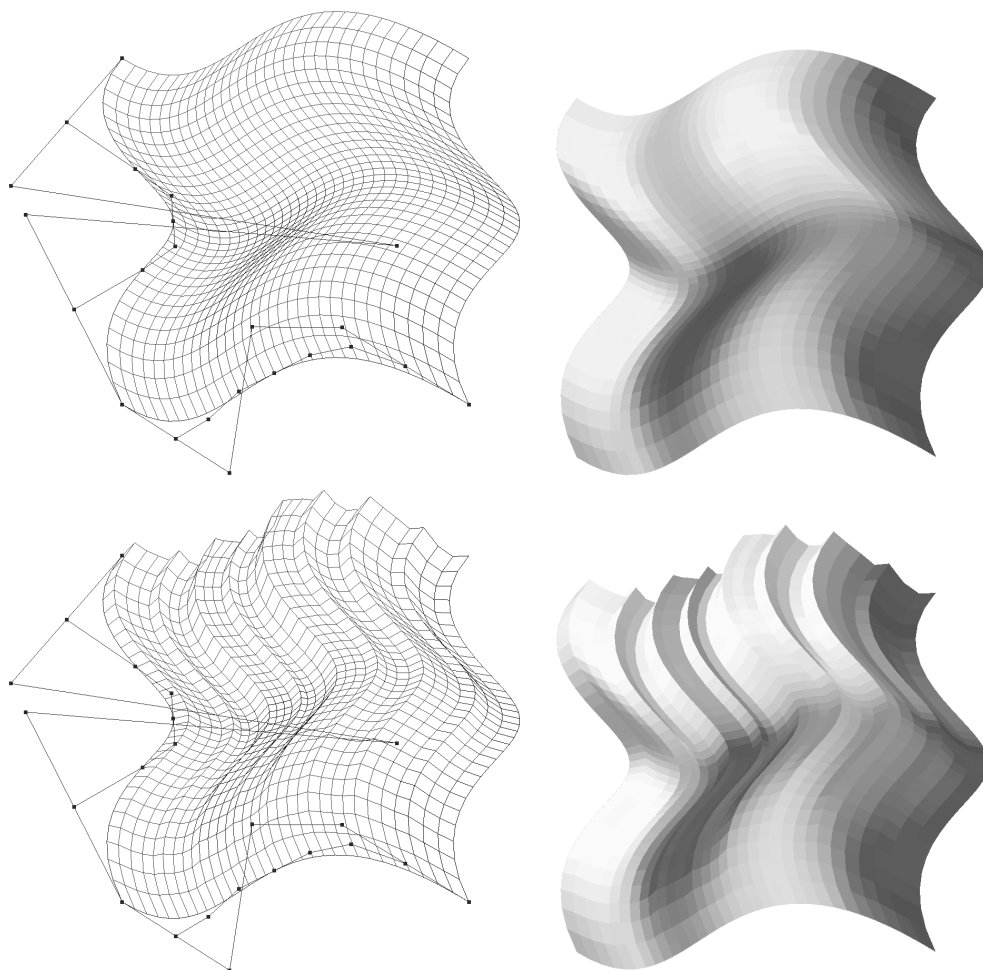


FIG. 5 – Maillages surfaciques obtenus en combinant deux courbes générées par des IFS affines (en haut), puis en combinant un IFS affine avec un IFS projectif (en bas).

libres, permettant la création de structures à priori constructibles. L'implémentation du modèle sous forme d'un logiciel CAO permet à l'architecte la manipulation simple et intuitive des figures géométriques, à l'aide d'une interface graphique d'utilisateur. La figure 6 montre quelques exemples de figures que l'on peut obtenir par la méthode proposée.

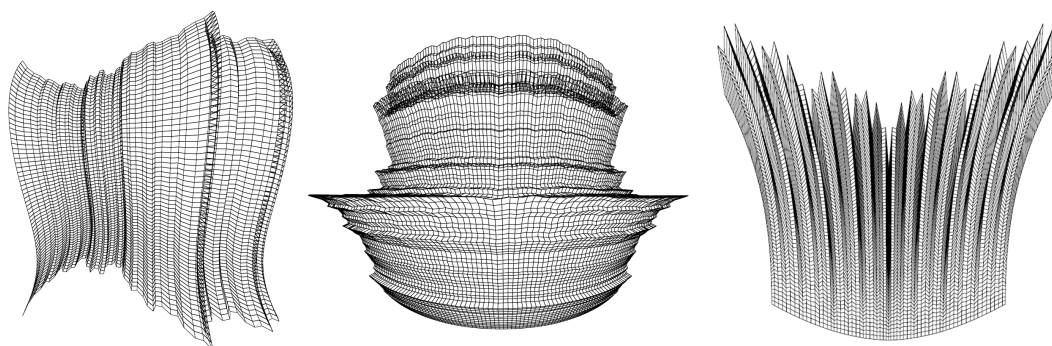


FIG. 6 – Essai du modèle de surface pour l'architecture.

Dans le cadre plus large de cette recherche interdisciplinaire, l'architecte peut alors aisément se servir de ces figures géométriques, épaissir ses faces et traiter les détails d'assemblage le long des arêtes pour obtenir des éléments de construction : des panneaux quadrilatéraux chanfreinés (voir figure 7). Dans le

cas général, ces éléments constructifs sont tous du même type mais géométriquement différents. Cette propriété permet d’automatiser la génération de plans d’exécution, qui sont dans le cas présent des fichiers machine pour la fabrication numérique. La fonction d’adressage, introduit sous le point 3.1.1, peut servir à l’organisation des éléments de construction au niveau logistique. L’adressage nécessaire pour optimiser les coûts de production et pour réaliser le montage de ce genre de constructions est directement proposé par le modèle IFS.

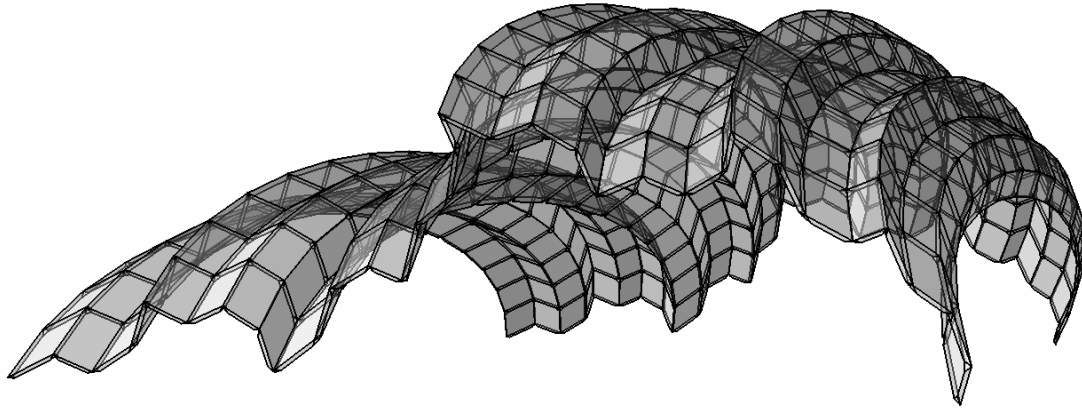


FIG. 7 – Structure d’un maillage volumique en vue d’une réalisation en panneaux de bois. Chaque face de la figure géométrique initiale est épaissie et chanfreinée pour former un ensemble d’éléments de construction cohérent.

## 5 Conclusion et perspectives

Le modèle itératif que nous proposons ne se limite pas à des surfaces développables, ni même différentiables, localement assimilables à un plan. Si les maillages obtenus possèdent bien des faces planes, les arêtes peuvent être vives (voir figure 6).

Le concepteur peut définir des familles de maillages vérifiant la contrainte de planéité des faces, puis en moduler la forme et l’aspect avec une saisie interactive des paramètres.

Le nombre de ces paramètres est relativement limité, la surface étant entièrement déterminée par la donnée de deux courbes à pôles dans  $\mathbb{R}^4$ . Une amélioration possible de ce modèle permettrait notamment de contrôler directement les quatre courbes de bords de cette surface, ce qui permettrait une plus grande souplesse dans le contrôle de la surface.

Enfin, ce modèle permet uniquement de générer des maillages quadrangulaires. Nous avons comme perspective de mettre en œuvre un procédé plus général, permettant d’établir des contraintes de coplanarité pour des IFS surfaciques dont les maillages sont de topologie quelconque. Ce procédé n’utiliserait donc pas d’opérateur de combinaison. Il s’agit d’établir des contraintes sur les paramètres d’un IFS surfacique, de sorte que la suite des maillages générés soit à faces planes.

## Références

- [BAR88] M.F. BARNESLEY. *Fractal Everywhere*. Academic press, INC, 1988.
- [GT05] Éric GUERIN and Éric TOSAN. *Fractal inverse problem : Approximation formulation and differential methods*. In *Fractals in Engineering : New Trends in Theory and Applications*, pages 271–285. Springer, 2005.
- [TBSG<sup>+</sup>06] E. TOSAN, I. BAILLY-SALINS, G. GOUATY, I. STOTZ, P. BUSER, and Y. WEINAND. *Une modélisation géométrique itérative basée sur les automates*. In *GTMG 2006*,

*Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, Cachan, pages 155–169, 22-23 Mars 2006.*

- [TBSS<sup>+</sup>07] E. TOSAN, I. BAILLY-SALINS, I. STOTZ, G. GOUATY, and Y. WEINAND. ,Modélisation itérative de courbes et surfaces : aspect multirésolution. ,In *GTMG 2007, Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, Valenciennes*, 21-22 Mars 2007.
- [ZT96] Chems Eddine ZAIR and Eric TOSAN. ,Fractal modeling using free form techniques. ,*Computer Graphics Forum*, 15(3) :269–278, August 1996. ,EUROGRAPHICS’96 Conference issue.
- [POT07] Helmut POTTMANN and BRELL-COKCAN, Sigrid and Johannes WALLNER. ,Discrete Surfaces for Architectural Design methods. ,In *Curves and Surface Design : Avignon 2006*, pages 213–234. Nashboro Press, 2007.
- [LIU06] Y. LIU, H. POTTMANN, J. WALLNER, W. WANG, Y.-L. YANG. ,Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces. ,In *ACM Trans. Graphics 25/3 (2006)*, 681-689, Proc. SIGGRAPH 2006.
- [POT06] H. POTTMANN, J. WALLNER. ,The focal geometry of circular and conical meshes. ,In *Geometry preprint 163*, Technische Universitt Wien, 2006
- [WANG06] W. WANG, J. WALLNER, Y. LIU. ,An angle criterion for conical mesh vertices. ,In *Geometry preprint 157*, Technische Universitt Wien, 2006